справедливое для любой выпуклой области G.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть G – выпуклая область на плоскости и $p \geq 2$. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathrm{P}(G) \leq \frac{(p+1)(p+2)}{3\rho(G)^{p-2}}\mathrm{I_p}(G) - \frac{(p-2)\mathrm{l}(\rho(G))\rho(G)^3}{3},$$

где $\mathrm{l}(\rho(G))$ *— длина линии уровня* $\rho(z,G)$*, расположенной на расстоянии* $\rho(G)$ *от границы* ∂G.

Литература

1. Makai E. *On the Principal Frequency of a Membrane and the Torsional Regidity of a Beam*. – Stanford University Press, 1962. – P. 227-231.

2. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. – М., Физматгиз, 1962. — 336 с.

3. Салахудинов Р.Г. *Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области* // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 66-79.

4. Payne L.E. *Some isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiply connected regions*. – Studies in Mathematical Analisis and Related Topics // Essays in honor of G. Polya (Standford University Press, Standford, California, 1962). – P. 270-280.

EXTENSIONAL OF MAKAI INEQUALITY FOR TORSIONAL RIGIDITY

L.I. Gafiyatullina, R.G. Salakhudinov

Using methods from [3], we proved a generalization of the Makai inequality for convex domains.

Keywords: torsional rigidity, Euclidean moments of a domain with respect to the boundary, isoperimetric inequalities, distance function to the boundary of a domain.

УДК 517.584

О НУЛЯХ КОМБИНАЦИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.А. Гималтдинова[1]

1 *alfiragimaltdinova@mail.ru*; Уфимский государственный нефтяной технический университет

Исследуются нули функции, являющейся суммой произведений функций Бесселя с противоположными индексами.

Ключевые слова: функция Бесселя, модифицированная функция Бесселя, множество нулей функции.

При исследовании спектральных задач для вырождающихся уравнений смешанного типа (а именно, при нахождении собственных значений) возникает необходимость нахождения нулей функции вида

$$f(t) = J_\nu(t)I_{-\nu}(t) + I_\nu(t)J_{-\nu}(t), \ \ 0 < \nu < 1, \tag{1}$$

при $\operatorname{Re} t \geq 0$.

Изучению нулей комбинаций произведений цилиндрических функций посвящено относительно небольшое количество исследований.

Например, в справочнике [1] приведены таблицы нескольких первых корней уравнения $J_\nu(x)N_\nu(kx) - J_\nu(kx)N_\nu(x) = 0$ для некоторых значений k и ν и корней уравнения $I_n(x)J'_n(x) - J_n(x)I'_n(x) = 0$ для $n = 0, 1, 2, 3$.

В некоторых случаях комбинации произведений функций Бесселя представляют собой элементарные функции, и тогда вопрос об их корнях решается элементарно, например, [2, с. 91]:

$$J_\nu(z)Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{z}{\pi z},$$

$$I_\nu(z)I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}.$$

В книге [3] приведен обзор работ, посвященных изучению нулей функций, содержащих произведения бесселевых функций, но функция (1) или аналогичные ей не исследованы. Там приведена формула

$$J_{-\nu}(z)I_\nu(z) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\ {}_0F_3\Big(1; 1-\frac{\nu}{2}, 1+\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{z^4}{64}\Big) -$$

$$-\frac{\sin(\pi\nu)z^2}{2\pi(1-\nu^2)}\ {}_0F_3\Big(1; \frac{3-\nu}{2}, \frac{3+\nu}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{z^4}{64}\Big), \tag{2}$$

где ${}_0F_3(1; a, b, c; z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

С учетом формулы (2) функцию (1) можно привести к виду

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\ {}_0F_3\Big(1; 1-\frac{\nu}{2}, 1+\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{t^4}{64}\Big).$$

Однако в известной нам литературе для полученной функции нет утверждений относительно ее корней.

Справедлива

Теорема. *Уравнение*

$$J_\nu(t)I_{-\nu}(t) + I_\nu(t)J_{-\nu}(t) = 0,\ \ 0 < \nu < 1, \tag{3}$$

имеет счетное множество действительных положительных корней $t_k^{(1)}$ *и счетное множество чисто мнимых корней* $i \cdot t_k^{(2)}$ *с положительной мнимой частью.*

Доказательство. 1) Пусть $t = x \in \mathbb{R}_+$. В силу того, что $(\forall x > 0)(I_\nu(x) > 0,\ I_{-\nu}(x) > 0)$, из уравнения (3) получим

$$\frac{J_\nu(t)}{I_\nu(t)} = -\frac{J_{-\nu}(t)}{I_{-\nu}(t)}. \tag{4}$$

При этом функция $f_1(t) = J_\nu(t)/I_\nu(t)$ имеет те же нули, что и функция $J_\nu(t)$, а функция $f_2(t) = -J_{-\nu}(t)/I_{-\nu}(t)$ – те же нули, что и функция $J_{-\nu}(t)$.

По теореме о разделении корней [4, с. 136] в силу того, что функции $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя (ν – нецелое число), нули функций $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ взаимно разделены, следовательно, и нули функций f_1 и f_2 также взаимно разделены. Это означает, что между любыми двумя соседними корнями функции f_1 найдется ровно один корень функции f_2, и наоборот. Отсюда в силу непрерывности обеих этих функций получим, что их графики пересекаются ровно в одной точке на каждом интервале между любыми двумя соседними корнями функции $J_\nu(t)$ (а также, между любыми двумя соседними корнями функции $J_{-\nu}(t)$).

Это означает, что уравнение (4) имеет счетное множество положительных корней. А зная нули функций $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$, можем отделить промежутки, на которых находятся корни уравнения (4).

2) Пусть $t = iy \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}_+$. Рассуждая аналогично, получим, что уравнение $I_\nu(iy)/J_\nu(iy) = -I_{-\nu}(iy)/J_{-\nu(iy)}$ имеет счетное множество чисто мнимых нулей.

Замечание. Остается не выясненным вопрос, имеет ли уравнение (3) другие комплексные корни, отличные от найденных чисто мнимых.

Можно убедиться в справедливости аналогичного утверждения для уравнения

$$J_\nu(t)I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)J_{-\nu}(t) = 0,\ \ 0 < \nu < 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-41-020516).

Литература

1. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.* – М.: Наука, 1977. – 344 с.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* – М.: Наука, 1974. – 296 с.

3. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* – М.: Мир, 1980. – 608 с.

4. Трикоми Ф. *Дифференциальные уравнения.* – М.: ИЛ., 1962. – 352 с.

ON ZEROS OF COMBINATIONS OF PRODUCTS OF CYLINDRICAL FUNCTIONS

A.A. Gimaltdinova

Zeros of a function that is the sum of products of Bessel functions with opposite indices are investigated.

Keywords: the Bessel function, the modified Bessel function, the set of zeros of the function.

УДК 517.9

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АППАРАТА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Ю.А. Гладышев[1], В.В. Калманович[2]

1 *v572264@yandex.ru*; Калужский государственный университет им.К.Э. Циолковского
2 —; Калужский государственный университет им.К.Э. Циолковского

В статье показано, что метод обобщенных степеней, предложенный Берсом и распространенный на операторы степени выше первой, позволяет свести решение уравнений второго и более высокого порядков к построению решений дифференциальных